Année Scolaire : 2011-2012
Classes : 4 ème Science2

Prof : L-Slah
Durée: 2 heures

L-F-B MONASTIR

DEVOIR DE CONTROLE N°1.

10/11/2012

EXERCICE N°1 :

I/ Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

❶ Si z un nombre complexe tel que $|z| = 2$, alors $|\bar{z} + i\bar{z}|$ est égal :

a $\sqrt{8}$ b $\sqrt{2}$ c $4\sqrt{2}$

❷ L'ensemble des points M d'affixe z tels que : $(z-i)(\bar{z}+i)=2$ est :

a un singleton b une droite c un cercle

❸ Si z = 1 + i, alors z^{2012} est égale :

a 2^{1006} b -2^{1006} c 2i

II/ Corriger les réponses suivantes. (**voir annexe fig1**) :
Les fonctions h et g sont données par leurs courbes respectives (ζ_g) et (ζ_h).

❶ Si $f(x) \geq h(x)$ pour $x > 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

❷ Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour $x \geq 2$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

❸ Si $f(x) \leq h(x)$ pour $x \leq -2$, alors $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

❹ Si $|f(x) - 2| \leq h(x)$ pour $x \leq -2$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

EXERCICE N°2 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ sont tracée les courbes (ζ_f) et (ζ_g) respectives des fonctions f et g. La fonction f est définie sur]-∞,-1] et la fonction g est définie sur]2,4]. (**voir annexe fig2**) :

❶ Déterminer $g\circ f([-2,-1])$, $\lim\limits_{x\to -\infty} g\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)\sin(\frac{1}{g(x)})$

❷ a- Montrer que pou tout réel a et b tels que : a < b ≤ -1, on a : $g\circ f(a) > g\circ f(b)$

b- Déduire le sens de variation de $g\circ f$ sur]-∞,-1].

❸ Montrer que l'équation $g\circ f(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans]-2,-1[.

EXERCICE N°3 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x^2+x+1}-2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

❶ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ Montrer que pour tout x $\in$]-∞,0[, $\dfrac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$, déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❸ Montrer que f est continue en 0.

❸ a- Montrer que l'équation f(x) = 0, admet au moins une solution α dans $\left]-\dfrac{1}{2},0\right[$.

b- En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$.

EXERCICE N°4 :

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = -e^{i\theta}\cos\theta$ et $z_2 = ie^{i\theta}\sin\theta$ avec $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

❶ a- Montrer que aff(I) = -1/2 ou I est le milieu du segment$[M_1M_2]$.

b- Vérifier que $z_2 - z_1 = e^{2i\theta}$

❷ Montrer que : $OM_1^2 + OM_2^2 = M_1M_2^2$, déduire la nature du triangle OM_1M_2 .

❸ Soit A d'affixe -1. Déterminer θ pour que OM_1AM_2 soit un carré.

EXERCICE N°5 :

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives : i, -3i et –i.

Pour tout point du plan M(z) (z ≠ -3i), on associe la point M'(z') définie par : $z' = \dfrac{iz-1}{z+3i}$.

❶ Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit réel.

❷ Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que : $|z| = 1$.

❸ a- Vérifier que : (z' – i).(z + 3i) = 2.

b- En déduire que : AM'.BM = 2 et que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}}) + (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}) \equiv 0[2\pi]$

figure 1 :

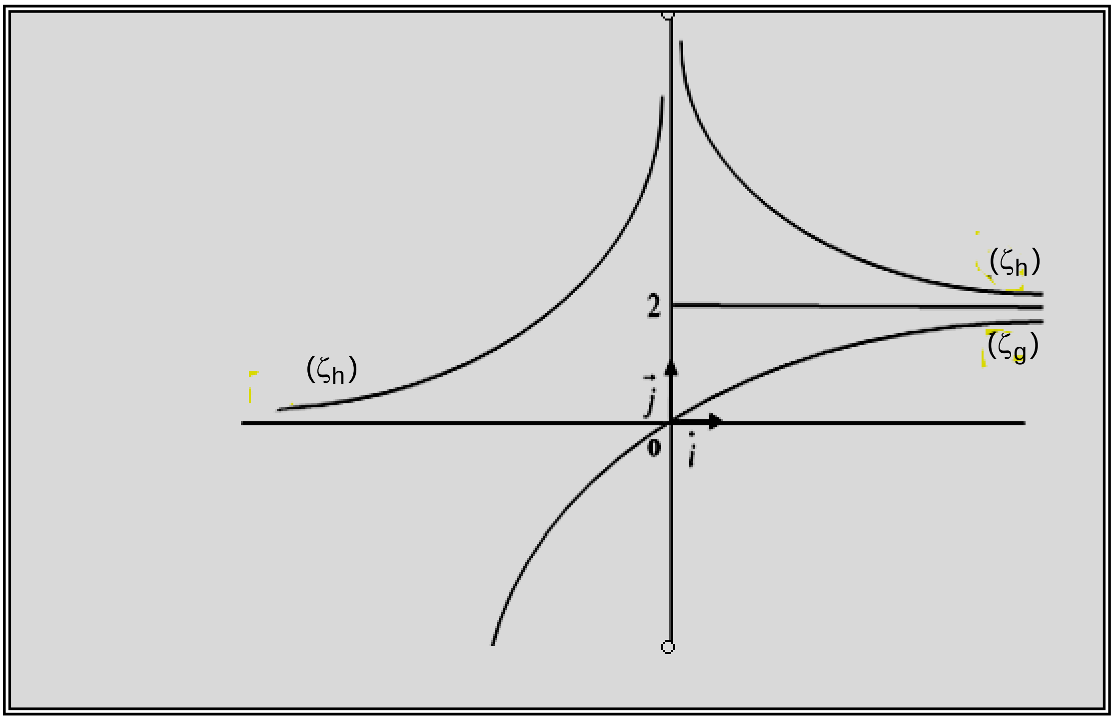

figure 2 :